

# Über die Greensche Funktion transparenter Zylinder

Von PETER BECKMANN und WALTER FRANZ

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Münster  
(Z. Naturforsch. **12 a**, 257—267 [1957]; eingegangen am 23. Januar 1957)

Eine einfache Anwendung der WATSON-Transformation auf die Zylinderfunktions-Reihe der GREENSchen Funktion führt zu einer schlecht konvergenten Residuensumme, welche für eine numerische Auswertung unbrauchbar ist. Nach der Umwandlung der Reihendarstellung in ein komplexes Integral lässt sich dieses jedoch in eine Reihe von Integralen aufspalten, welche sich sowohl leicht numerisch auswerten als auch sinnvoll physikalisch deuten lassen (Primärwelle, reflektierte Welle, Regenbögen). Hierbei ergeben sich Anteile, welche Strahlen der geometrischen Optik entsprechen, als Beiträge von Sattelpunkten. Die gebeugten Wellen werden durch Residuensummen dargestellt.

Die GREENSche Funktion für die Beugung an einem Zylinder endlicher Leitfähigkeit lässt sich leicht in Form einer Entwicklung nach Zylinderfunktionen angeben. Wegen ihrer schlechten Konvergenz ist diese Entwicklung jedoch nur für kleine Durchmesser des Zylinders brauchbar. Im analogen Falle der Beugung an der Kugel wurde von VAN DER POL und BREMMER<sup>1</sup> versucht, durch Anwendung der WATSON-Transformation<sup>2</sup> eine für die numerische Auswertung brauchbare Darstellung zu erhalten. Da die Methode von VAN DER POL und BREMMER mathematisch wie physikalisch nicht befriedigte, wurde in einer früheren Arbeit<sup>3</sup> die GREENSche Funktion im Falle undurchsichtiger Zylinder unter Anwendung einer von FRANZ<sup>4</sup> angegebenen modifizierten

WATSON-Transformation umgeformt. Hierbei ergaben sich geometrisch-optische Anteile als Beiträge von Sattelpunkten, die gebeugte Welle in Gestalt einer Residuensumme.

In der vorliegenden Arbeit wird die GREENSche Funktion für die Beugung an durchsichtigen Zylindern durch Anwendung einer modifizierten WATSON-Transformation und durch eine geeignete Aufspaltung umgeformt. Es ergeben sich wieder die geometrisch-optischen Anteile als Sattelpunktsbeiträge und gebeugte Wellen als Residuensummen.

Die für die Rechnung notwendigen asymptotischen Formeln für die Zylinderfunktionen von komplexem Argument als Funktion des komplexen Index werden an anderer Stelle<sup>5</sup> abgeleitet.

## 1. Durchführung der Watson-Transformation

Die GREENSche Funktion für die Beugung an einem Zylinder vom Radius  $a$  und komplexen Brechungsindex  $n$  lautet

$$G(\varrho_1, \varrho_2, \varphi) = \frac{i}{8} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \cos(m\varphi) H_m^{(1)}(k\varrho_2) \left[ H_m^{(2)}(k\varrho_1) - R_m \frac{H_m^{(2)}(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(k\varrho_1) \right], \quad \varrho_2 > \varrho_1 > a. \quad (1)$$

$k$  bedeutet die Wellenzahl  $2\pi/\lambda$ . Die Koeffizienten  $R_m$  ergeben sich aus den Grenzbedingungen zu

$$R_m = \frac{[\log' H_m^{(2)}(ka) - N \log' J_m(\bar{k}a)]}{[\log' H_m^{(1)}(ka) - N \log' J_m(\bar{k}a)]}, \quad \bar{k} = n k; \quad N = n \text{ für } \mathfrak{E} \times \mathfrak{e}_z = 0, \quad N = \frac{1}{n} \text{ für } \mathfrak{S} \times \mathfrak{e}_z = 0. \quad (2)$$

$\log' Z_m(z)$  steht für  $\frac{\partial}{\partial z} Z_m(z)/Z_m(z)$ . Wie im Falle des idealleitenden Zylinders —  $|n| \rightarrow \infty$  — ist die Reihendarstellung (1) bei großen  $ka$  für eine numerische Auswertung unbrauchbar. Nach WATSON<sup>2</sup> verwandeln wir (1) unter Benutzung der Beziehung

$$\oint_{\gamma} \frac{dv}{\sin v \pi} = 2i(-1)^m$$

<sup>1</sup> B. VAN DER POL u. H. BREMMER, Phil. Mag. **24**, 141, 825 [1937].

<sup>2</sup> G. N. WATSON, Proc. Roy. Soc., Lond. A **95**, 83 [1919].

<sup>3</sup> W. FRANZ u. P. BECKMANN, IRE Transactions on Antennas and Propagation, AP-4, 203 [1956].

<sup>4</sup> W. FRANZ, Z. Naturforsch. **9 a**, 705 [1954].

<sup>5</sup> P. BECKMANN u. W. FRANZ, Asymptotisches Verhalten der Zylinderfunktionen in Abhängigkeit vom komplexen Index, Z. angew. Math. Mech. [1957], im Druck.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

in ein komplexes Integral:

$$G = -\frac{1}{16} \int_C \frac{\cos \nu(\varphi - \pi)}{\sin \nu \pi} H_\nu^{(1)}(k \varrho_2) \left[ H_\nu^{(2)}(k \varrho_1) - R_\nu \frac{H_\nu^{(2)}(k a)}{H_\nu^{(1)}(k a)} H_\nu^{(1)}(k \varrho_1) \right] d\nu. \quad (3)$$

Der Integrationsweg  $C$  umschließt die reelle  $\nu$ -Achse in mathematisch negativem Sinne. Üblicherweise de- formiert man den Weg  $C$  in Umläufe um nicht auf der reellen Achse gelegene Pole des Integranden und wertet die so entstehenden Integrale durch Residuensummen aus.

Außerhalb der reellen Achse besitzt der Integrand von (3) dort Pole, wo der Nenner des Koeffizienten  $R_\nu$  verschwindet, d. h. wo gilt:

$$\log' H_\nu^{(1)}(k a) = N \log' J_\nu(\bar{k} a). \quad (4)$$

Die Punkte, in welchen diese Gleichung erfüllt wird, liegen in den Gebieten der  $\nu$ -Ebene, wo mindestens eine der beiden logarithmischen Ableitungen rasch veränderlich ist. Dies ist der Fall in der Umgebung der Nullstellen von  $H_\nu^{(1)}(k a)$  und  $H_\nu^{(1)'}(k a)$  sowie derjenigen von  $J_\nu(\bar{k} a)$  und  $J_\nu'(\bar{k} a)$ . Auf die Pole in der Umgebung der Nullstellen von  $J_\nu(\bar{k} a)$  und  $J_\nu'(\bar{k} a)$ , die von anderen Autoren übersehen wurden, wiesen erstmalig die Verfasser in einer früheren Arbeit<sup>3</sup> hin. Die Nullstellen von  $J_\nu(k a)$  und  $J_\nu'(\bar{k} a)$  liegen auf einer Kurve, welche von  $\nu = \bar{k} a$  ausgeht und sich asymptotisch der negativ reellen  $\nu$ -Achse nähert (vgl. Anm. 5). Durch Anwendung der asymptotischen Formeln ergibt sich, daß die entsprechenden Pole des Integranden von (3) im Bereich  $|\Re(\nu)| < k a$  stets oberhalb der Nullstellenkurve von  $J_\nu(\bar{k} a)$  liegen. Für  $\nu \rightarrow -\infty$  nähern sie sich stärker als exponentiell den ganzen negativen

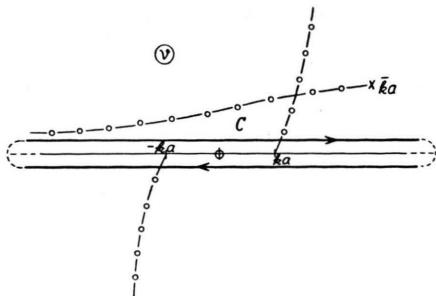


Abb. 1. Integrationsweg  $C$  und Pole des Integranden von (3).

Werten von  $\nu$ . Abb. 1 zeigt schematisch die Lage der Pole des Integranden von (3) sowie den Integrationsweg  $C$ .

Für die weiteren Umformungen des Integrationsweges  $C$  benutzt man zweckmäßig für den Integranden von (3) eine Abkürzung:

$$F(\nu) \equiv -\frac{1}{16} \cos \nu(\varphi - \pi) H_\nu^{(1)}(k \varrho_2) \quad (5)$$

$$\cdot \left[ H_\nu^{(2)}(k \varrho_1) - R_\nu \frac{H_\nu^{(2)}(k a)}{H_\nu^{(1)}(k a)} H_\nu^{(1)}(k \varrho_1) \right].$$

Führt man auf dem unterhalb der reellen Achse verlaufenden Teil des Weges  $C$  als neue Variable  $-\nu$  ein, so ergeben sich zwei Integrale über den oberhalb der reellen Achse gelegenen Teil des Weges  $C$ ; dieser Teil sei im folgenden mit  $C_+$  bezeichnet.

$$G = \int_{C_+} \frac{F(\nu)}{\sin \nu \pi} d\nu + \int_{C_+} \frac{F(-\nu)}{\sin \nu \pi} d\nu. \quad (6)$$

Das zweite Integral in (6) besitzt in der oberen Halbebene nur Pole in der Umgebung der Nullstellen von  $H_\nu^{(1)}(k a)$ . Der Weg  $C_+$  wird nun deformiert in Umläufe um die in der oberen Halbebene gelegenen Pole der Integranden. Die bei der Umformung auftretenden Integrale über Kreisbögen im Unendlichen liefern keinen Beitrag, da in (3) wegen der Differenzbildung die HANKEL-Funktionen zweiter Art stets so durch eine geeignete Linearkombination der beiden HANKEL-Funktionen ersetzt werden können, daß der Integrand im Unendlichen mindestens exponentiell verschwindet. Man erhält so:

$$G = \int_{C_1} \frac{F(\nu) + F(-\nu)}{\sin \nu \pi} d\nu + \int_{C_2} \frac{F(\nu)}{\sin \nu \pi} d\nu. \quad (7)$$

$C_1$  umschließt die in der Umgebung der Nullstellen von  $H_\nu^{(1)}(k a)$  gelegenen Pole von  $R_\nu$  und  $R_{-\nu}$ ,  $C_2$  die Pole von  $R_\nu$  bei den Nullstellen von  $J_\nu(\bar{k} a)$  (vgl. Abb. 2). Im Falle eines stark absorbierenden Zylindermaterials besitzen die vom Wege  $C_2$  einge-

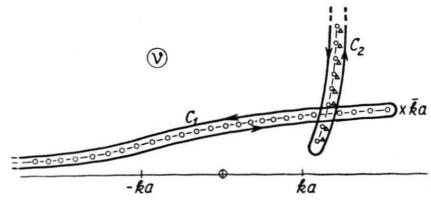


Abb. 2. Integrationswege  $C_1$  und  $C_2$ ;  $\circ$  Pole von  $R_\nu$ ,  $\triangle$  Pole von  $R_{-\nu}$ .

schlossenen Pole einen großen Imaginärteil. Dies bedeutet, daß die durch das Integral über  $C_2$  dargestellten Wellen stark gedämpft sind und gegenüber der im Integral über  $C_1$  enthaltenen Primär- und reflektierten Welle vernachlässigt werden können<sup>3</sup>. Ist das Zylindermaterial dagegen transparent, so besitzen  $\bar{k}a$  und damit die von  $C_2$  eingeschlossenen Pole nur einen kleinen Imaginärteil. In diesem Falle kann das Integral über  $C_2$  nicht mehr vernachlässigt werden. Zwar läßt es sich in eine Residuensumme verwandeln, jedoch sind alle Summenglieder mit  $|\nu| < \bar{k}a$  wegen der geringen Dämpfung bei einer numerischen Auswertung zu berücksichtigen. Dies bedeutet aber, daß die Anwendung der WATSON-Transformation in der angegebenen Form gegenüber der direkten Auswertung von (1) keine Vereinfachung bietet. Man kann jedoch die Residuensumme durch geeignete Anwendung der EULERSchen Summenformel in eine Reihe von Integralen verwandeln, welche in der Umgebung der Nullstellen von  $J_\nu(\bar{k}a)$  keine Pole mehr besitzen. Hierbei zeigt sich, daß diese Integrale solchen Strahlen der geometrischen Optik entsprechen, welche das Innere des Zylinders ein- bzw. mehrfach auf einer Sehne durchquert haben (Regenbögen). Dasselbe Ergebnis läßt sich jedoch auf einfachere und übersichtlichere Weise direkt aus der Integraldarstellung (6) herleiten.

## 2. Entwicklung nach Regenbogentermen

Man entwickelt – wie erstmalig von VANDER POL und BREMMER<sup>1</sup> bei der Behandlung der Beugung an der Kugel vorgeschlagen wurde – den Koeffizienten  $R_\nu$  nach Potenzen von

$$\frac{H_\nu^{(1)}(\bar{k}a)}{H_\nu^{(2)}(\bar{k}a)} \frac{\log' H_\nu^{(1)}(k a) - N \log' H_\nu^{(1)}(\bar{k}a)}{\log' H_\nu^{(1)}(k a) - N \log' H_\nu^{(2)}(\bar{k}a)}. \quad (8)$$

Diese Entwicklung nach Regenbogen-Termen kann jedoch nur auf einem Integrationswege durchgeführt werden, auf welchem der Betrag von (8) kleiner als Eins ist. Auch darf sie nicht – wie es VANDER POL und BREMMER taten – bereits in der Reihendarstellung (1) angewandt werden. Der Ausdruck (8) besitzt nämlich in der Nähe der Nullstellen von  $H_\nu^{(2)}(\bar{k}a)$  eine Polstellenreihe, welche von  $\nu = \bar{k}a$  ausgeht und die reelle Achse schneidet; daher wird im allgemeinen ein Pol so nahe bei einer Stelle  $\nu = m$  (ganz) liegen, daß der Betrag von (8) für  $\nu = m$  größer als Eins ist, so daß die Entwicklung in der Reihendarstellung (1) divergiert.

Einen Integrationsweg, auf welchem der Betrag von (8) kleiner als Eins ist, erhält man wie folgt: Man addiert und subtrahiert in (6)

$$2 \int_{C_+} \frac{F(-\nu)}{\sin \nu \pi} d\nu$$

und erhält

$$G = \int_{C_+} \frac{F(\nu) - F(-\nu)}{\sin \nu \pi} d\nu + 2 \int_{C_+} \frac{F(-\nu)}{\sin \nu \pi} d\nu. \quad (9)$$

Der Weg des zweiten Integrals in (9) wird in den in Abb. 3 angegebenen Weg  $D_2$  deformiert.  $D_2$  umschließt die im ersten Quadranten in der Umgebung der Nullstellen von  $H_\nu^{(1)}(\bar{k}a)$  gelegenen Pole von  $R_{-\nu}$ . Der Weg ist jedoch so gewählt, daß er gleichzeitig die ebenfalls in der Umgebung der Nullstellen von  $H_\nu^{(1)}(\bar{k}a)$  gelegenen Pole von (8) in einem solchen Abstande umschließt, daß der Betrag von (8) kleiner als Eins ist. Das erste Integral in (9)

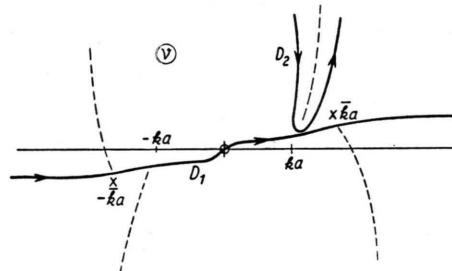


Abb. 3. Verlauf der Integrationswege  $D_1$  und  $D_2$ .

enthält als Faktor die WRONSKI-Determinante von  $J_\nu(\bar{k}a)$  und  $J_{-\nu}(\bar{k}a)$ , welche den Nenner  $\sin \nu \pi$  kompensiert. Daher kann der Integrationsweg über die reelle Achse gezogen und in den in Abb. 3 angegebenen Weg  $D_1$  überführt werden.  $D_1$  führt von  $\nu = -\infty$  in geringem Abstande oberhalb der Kurve, auf welcher

$$e^{2\pi i \nu} \frac{H_\nu^{(1)}(\bar{k}a) \log' H_\nu^{(1)}(k a) - N \log' H_\nu^{(1)}(\bar{k}a)}{H_\nu^{(2)}(\bar{k}a) \log' H_\nu^{(1)}(k a) - N \log' H_\nu^{(2)}(\bar{k}a)}$$

den Betrag Eins hat, symmetrisch zum Nullpunkt in geringem Abstand unterhalb der Kurve, auf welcher (8) den Betrag Eins annimmt, nach  $\nu = +\infty$ . Die bei der Umformung auftretenden Integrale über Kreisbögen im Unendlichen verschwinden aus den bereits oben angegebenen Gründen. Man benutzt nun für  $R_\nu$  die Aufspaltung:

$$R_\nu = R_{12} - \frac{H_\nu^{(1)}(\bar{k}a)}{H_\nu^{(2)}(\bar{k}a)} T_{12} T_{21} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{H_\nu^{(1)}(\bar{k}a)}{H_\nu^{(2)}(\bar{k}a)} R_{21} \right]^l. \quad (10)$$

Die Koeffizienten  $R$  und  $T$ , welche für  $k a \rightarrow \infty$  in die FRESNELSchen Koeffizienten übergehen, haben die Bedeutung

$$R_{12} = \frac{\log' H_v^{(2)}(k a) - N \log' H_v^{(2)}(\bar{k} a)}{\log' H_v^{(1)}(k a) - N \log' H_v^{(2)}(\bar{k} a)}, \quad (11 \text{ a})$$

$$T_{12} = 1 - R_{12}, \quad (11 \text{ b})$$

$$R_{21} = - \frac{\log' H_v^{(1)}(k a) - N \log' H_v^{(1)}(\bar{k} a)}{\log' H_v^{(1)}(k a) - N \log' H_v^{(2)}(\bar{k} a)}, \quad (11 \text{ c})$$

$$T_{21} = 1 + R_{21}. \quad (11 \text{ d})$$

Benutzt man noch im Integral über  $D_1$  die Aufspaltung

$$\frac{1}{\sin \nu \pi} = -2i \sum_{m=0}^l e^{i\nu\pi} e^{2\pi i \nu m} + \frac{e^{2\pi i \nu(l+1)}}{\sin \nu \pi}, \quad (12)$$

sowie die Umlaufsrelationen für die Zylinderfunktionen, so ergibt sich schließlich:

$$G = G_I + G_{II} + G_{III}, \quad (13 \text{ a})$$

$$G_I \equiv - \frac{1}{8} \int_{D_2} \frac{\cos \nu(\varphi - \pi)}{\sin \nu \pi} H_v^{(1)}(k \varrho_2) \left[ H_v^{(2)}(k \varrho_1) - R_{12} \frac{H_v^{(2)}(k a)}{H_v^{(1)}(k a)} H_v^{(1)}(k \varrho_1) \right] d\nu, \quad (13 \text{ b})$$

$$G_{II} \equiv - \frac{1}{8} \int_{D_2} \frac{\cos \nu(\varphi - \pi)}{\sin \nu \pi} H_v^{(1)}(k \varrho_2) H_v^{(1)}(k \varrho_1) \frac{H_v^{(2)}(k a) H_v^{(1)}(\bar{k} a)}{H_v^{(1)}(k a) H_v^{(2)}(\bar{k} a)} e^{2\pi i \nu} T_{12} T_{21} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{H_v^{(1)}(\bar{k} a)}{H_v^{(2)}(\bar{k} a)} e^{2\pi i \nu} R_{21} \right]^l d\nu, \quad (13 \text{ c})$$

$$G_{III} \equiv \frac{i}{8} \int_{D_1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=0}^l \cos \nu(\varphi - \pi) e^{i\nu\pi} e^{2\pi i \nu m} H_v^{(1)}(k \varrho_2) H_v^{(1)}(k \varrho_1) \frac{H_v^{(2)}(k a)}{H_v^{(1)}(k a)} \cdot \frac{H_v^{(1)}(\bar{k} a)}{H_v^{(2)}(\bar{k} a)} T_{12} T_{21} \left[ \frac{H_v^{(1)}(\bar{k} a)}{H_v^{(2)}(\bar{k} a)} R_{21} \right]^l d\nu. \quad (13 \text{ d})$$

Wie bereits früher<sup>3</sup> am Beispiel des undurchsichtigen Zylinders gezeigt wurde, enthält (13 b) die an der Grenze des geometrischen Schattens entstehenden Kriechwellen, welche nicht in den Zylinder eindringen, sowie im geometrischen Lichtgebiet Primär- und reflektierte Welle.

### 3. Kriechwellen

Der Integrationsweg von  $G_{II}$  umschließt die im ersten Quadranten in der Umgebung der Nullstellen von  $H_v^{(1)}(k a)$  gelegenen Pole des Integranden. Die genaue Lage dieser Pole als Funktion des Brechungsindex und des Zylinderradius wurde bereits in einer früheren Arbeit<sup>3</sup> eingehend untersucht. Da der Integrand wegen der in ihm enthaltenen Potenzen von  $e^{2\pi i \nu}$  im Unendlichen exponentiell klein wird, können wir  $G_{II}$  in eine konvergente Residuensumme verwandeln:

$$G_{II} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(k a)^2} \frac{N}{n} \sum_p \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} \left\{ \frac{\partial^{l+1}}{\partial \nu^{l+1}} \frac{e^{2\pi i \nu(l+1)} [e^{i\nu\pi} + e^{i\nu(2\pi - q)}]}{1 - e^{2\pi i \nu}} H_v^{(1)}(k \varrho_2) H_v^{(1)}(k \varrho_1) \cdot \frac{1}{[H_v^{(1)}(k a)]^2 [H_v^{(2)}(\bar{k} a)]^2} \left[ - \frac{H_v^{(1)}(k a)}{H_v^{(2)}(\bar{k} a)} (\log' H_v^{(1)}(k a) - N \log' H_v^{(1)}(\bar{k} a)) \right]^l \right\}_{\nu=r_p} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} (\log' H_v^{(1)}(k a) - N \log' H_v^{(2)}(\bar{k} a)) \right\}_{\nu=r_p}^{-(l+2)}. \quad (14)$$

Hier wurde benutzt, daß die Zähler der Koeffizienten  $T$  die WRONSKI-Determinanten von  $H_v(k a)$  bzw.  $H_v(\bar{k} a)$  enthalten.

Um zu untersuchen, ob die Reihenglieder von Anfang an kleiner werden und damit die Residuensumme für eine numerische Auswertung brauchbar ist, ersetzen wir die HANKEL-Funktionen vom Argument  $ka$  durch die entsprechenden AIRYSchen Integrale (s. Anhang 1). Ferner setzen wir voraus, daß Auf- und Quellpunkt weiter als  $3(ka)^{1/3}/k$  von der Zylinderoberfläche entfernt sind und daß  $|n| > 1 + 3(ka)^{-2/3}$  ist. Dann können wir für die übrigen HANKEL-Funktionen die DEBYEschen asymptotischen Formeln verwenden und erhalten als bestimmenden Exponentialfaktor:

$$\exp \left\{ i \nu_p \left[ \varphi + (l+1) 2\pi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - 2(l+1) \ar \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

Der Realteil des Exponenten ist bei positivem  $\Im(\nu_p)$  und  $\varphi > 0$  negativ und nimmt mit wachsendem  $\Im(\nu_p)$  ab. Daher wird der Betrag der Reihenglieder in (14) mit wachsendem  $p$  von Anfang an kleiner und die Residuensumme ist für eine numerische Auswertung brauchbar. Um einen Einblick in die physikalische Bedeutung der Residuensummen zu erhalten, betrachten wir die Summe mit  $l=0$ . Wir entwickeln den Nenner  $1/(1 - \exp[2\pi i \nu_p])$  und betrachten vom ersten Glied der Entwicklung nur den Summanden mit  $\exp[i \nu_p \varphi]$  als Winkelabhängigkeit

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{(ka)^2} \frac{N}{n} \sum_p \exp[i \nu_p (\varphi + 2\pi)] \frac{H_{\nu_p}^{(1)}(ka) H_{\nu_p}^{(1)}(k\varrho_1)}{[H_{\nu_p}^{(1)}(ka)]^2 [H_{\nu_p}^{(2)}(ka)]^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} (\log' H_r^{(1)}(ka) - N \log' H_r^{(2)}(\bar{ka})) \right]_{\nu=\nu_p}^{-2} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} \log \left\{ \exp[i \nu (\varphi + 2\pi)] \frac{H_r^{(1)}(k\varrho_2) H_r^{(1)}(k\varrho_1)}{[H_r^{(1)}(ka)]^2 [H_r^{(2)}(\bar{ka})]^2} \right\} \right]_{\nu=\nu_p}. \quad (16)$$

Ersetzen wir die Zylinderfunktionen unter den gleichen Voraussetzungen wie oben durch ihre asymptotischen Darstellungen, so erhalten wir einen Ausdruck der Gestalt

$$\sum_p B_p \exp[i \Phi_p] \quad \text{mit} \quad (17a)$$

$$B_p = (ka)^{-1/3} 6^{-2/3} (n^2 - 1)^{3/2} \{ [(k\varrho_2)^2 - (ka)^2] [(k\varrho_1)^2 - (ka)^2] \}^{-1/4} [A(q_p)]^{-2} \cdot \left\{ 1 - i \frac{N}{n} (n^2 - 1)^{3/2} + e^{i(\pi/6)} \left( \frac{6}{ka} \right)^{2/3} \frac{q_p}{3} (n^2 - 1)^{1/2} \right\}^{-2} \quad (17b)$$

$$\cdot \left\{ \nu_p \left[ \varphi + 2\pi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} - 2 \ar \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right] - 2 \frac{N}{n} (n^2 - 1)^{1/2} \right\},$$

$$q_p = e^{-i(\pi/3)} \left( \frac{6}{ka} \right)^{1/3} (\nu_p - ka) \quad \text{und}$$

$$A(q_p) = k \{ (\varrho_2^2 - a^2)^{1/2} + (\varrho_1^2 - a^2)^{1/2} + 2a(n^2 - 1)^{1/2} \} + \nu_p \left\{ \varphi + 2\pi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} - 2 \ar \cos \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{\pi}{6} \right\}. \quad (17c)$$

(Zur Umformung s. Anhang 1!) Die durch (17) dargestellte Welle läßt sich deuten als Kriechwelle, welche den Zylinder einmal auf einer Sehne durchquert hat [vgl. (17c) mit Abb. 4]. Die Amplitude dieser Welle enthält als Faktor:

$$\nu_p \left[ \varphi + 2\pi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} - 2 \ar \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right] - 2 \frac{N}{n} (n^2 - 1)^{1/2}. \quad (18)$$

Das Glied mit  $2N(n^2 - 1)^{1/2}/n$  läßt sich deuten als der Anteil, welcher vom Quellpunkt ausgehend den Zylinder tangentiell trifft, sofort unter dem Winkel der Totalreflexion eindringt, ihn auf einer Sehne durchquert und dann weiterkriecht. Der mit wachsender Kriechstrecke anwachsende Anteil

$$\nu_p \left[ \varphi + 2\pi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} - 2 \ar \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right]$$

läßt sich deuten als Zustrahlung von der Welle, welche ebenfalls tangentiell auf den Zylinder trifft, dann aber auf der Oberfläche weiterkriecht und hierbei laufend unter dem Winkel der Totalreflexion in das Innere des Zylinders einstrahlt. Das in Anschluß an (14) fortgelassene Glied mit der Winkelabhängigkeit  $\exp[i \nu_p (2\pi - \varphi)]$  entspricht der Welle, welche in entgegengesetzter Richtung um den Zylinder

der gekrochen ist. Die höheren Glieder der Entwicklung von  $1/(1 - \exp[2\pi i \nu_p])$  bringen die Wellen, welche mehrmals um den Zylinder gekrochen sind. Die übrigen Summanden von (14), in welchen  $l \neq 0$  ist, ergeben analog Kriechwellen, welche das Innere des Zylinders  $(l+1)$ -mal auf einer Sehne durchquert haben.

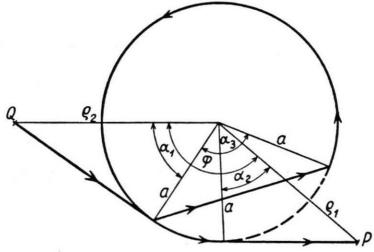


Abb. 4. Kriechstrecke der Welle (17).

$$\alpha_1 = \ar \cos \frac{a}{\varrho_0}; \quad \alpha_2 = \ar \cos \frac{a}{\varrho_1}; \quad \alpha_3 = \ar \cos \frac{1}{n}.$$

#### 4. Linsenterm

Den von uns mit  $G_{III}$  bezeichneten Teil der GREEN-schen Funktion (13 d) wertet man zweckmäßig nach der Sattelpunktmethode aus. Als Beispiel betrachten wir den Summanden mit  $l=0$ , welcher nach einfacher Umformung (Aufspaltung des  $\cos$  in Exponentialfunktionen, Einführung von  $-\nu$  als neuer Variabler im Gliede mit  $e^{i\nu(2\pi-\varphi)}$ ) lautet:

$$G_{III0} = \frac{i}{8} \int e^{i\nu\varphi} H_{\nu}^{(1)}(k\varrho_2) H_{\nu}^{(1)}(k\varrho_1) \cdot \frac{H_{\nu}^{(2)}(ka) H_{\nu}^{(1)}(\bar{ka})}{H_{\nu}^{(1)}(ka) H_{\nu}^{(2)}(\bar{ka})} T_{12} T_{21} d\nu. \quad (19)$$

Die Lage der Sattelpunkte  $\nu_s$  bestimmt sich aus

$$\varphi - \ar \cos \frac{\nu_s}{k\varrho_2} - \ar \cos \frac{\nu_s}{k\varrho_1} + 2 \ar \cos \frac{\nu_s}{ka} - 2 \ar \cos \frac{\nu_s}{nk a} = 0. \quad (20)$$

Im allgemeinen besitzt der Integrand von (19) Sattelpunkte bei negativen und positiven  $\nu$ . Zunächst betrachten wir diejenigen mit negativem  $\nu_s$ . Mit  $\bar{\nu}_s = -\nu_s$  wird aus (20) bei richtiger Wahl der Vorzeichen:

$$\varphi - 2\pi + \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{k\varrho_2} + \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{k\varrho_1} - 2 \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{ka} + 2 \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{nk a} = 0. \quad (21)$$

Wir berücksichtigen nur Sattelpunkte mit

$$|\Re(\nu_s)| < ka.$$

Sattelpunkte außerhalb dieses Bereiches liefern wegen des Faktors  $T_{12}$  nur stärker als exponentiell kleine Beiträge.

Liegt der Aufpunkt wie in Abb. 5 angegeben zwischen der Grenze der Totalreflexion und dem Zentralstrahl und deutet man  $\bar{\nu}_s/k$  wie üblich als den Abstand des vom Quellpunkte ausgehenden Strahles vom Mittelpunkte des Zylinders, so wird (21) von solchen Strahlen der geometrischen Optik erfüllt,

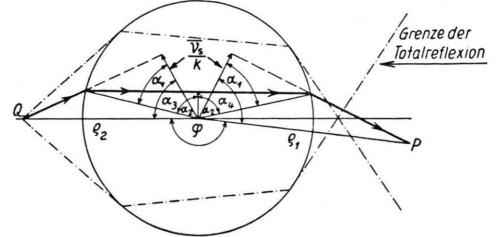


Abb. 5. Geometrisch-optischer Strahlengang, welcher dem Sattelpunkt nach Gl. (21) entspricht.

$$\alpha_1 = \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{ka}; \quad \alpha_2 = \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{k\varrho_1};$$

$$\alpha_3 = \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{k\varrho_2}; \quad \alpha_4 = \ar \cos \frac{\bar{\nu}_s}{k\varrho_1}.$$

welche den Zylinder einmal auf einer Sehne durchquert haben und bei denen der Eintrittspunkt in den Zylinder vom Aufpunkt aus gesehen jenseits des Zentralstrahles liegt. Die hier durchgeführte Identifizierung von  $\bar{\nu}_s/k$  mit einer geometrischen Strecke lässt sich streng nur für reelle Brechungsindizes durchführen. Ist  $n$  komplex, so werden  $\bar{\nu}_s/k$  und die Winkel  $\alpha_i$  komplex. Am grundsätzlichen Strahlengang ändert sich jedoch nichts, da das Brechungsgesetz in der Form  $k \cos \alpha_1 = k \cos \alpha_2$  erhalten bleibt.

Wandert der Aufpunkt P in Abb. 5 mit abnehmendem  $\varphi$  auf die Grenze der Totalreflexion zu, so senkt sich die negativ imaginäre Halbebene und der Sattelpunkt wandert nach  $\bar{\nu}_s = -ka$ . Überschreitet der Aufpunkt die Grenze der Totalreflexion, so senkt sich die untere  $\nu$ -Halbebene noch weiter und der Sattelpunkt wandert in die negativ imaginäre Halbebene. Jetzt kann der Integrationsweg von  $G_{III0}$  im dritten Quadranten in einen Umlauf um die Pole des Integranden in der Umgebung der Nullstellen von  $H_{\nu}^{(1)}(ka)$  verwandelt und das Integral über diesen Umlauf durch eine Residuensumme ausgewertet werden. Diese liefert genau den Sprung der Kriechwellen, welcher beim Überschreiten der Grenze der Totalreflexion zu erwarten ist. Wie im Anhang ge-

zeigt wird, liefern die Integrale über die Kreisbögen im Unendlichen, welche bei der Umformung des Weges auftreten, keinen Beitrag. Damit liefert  $G_{III0}$

mit der Amplitude  $B' = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left\{ \left[ (k\varrho_2)^2 - v_s^2 \right]^{1/2} + \left[ (k\varrho_1)^2 - v_s^2 \right]^{1/2} - 2 \left[ (ka)^2 - v_s^2 \right]^{1/2} + 2 \left[ (\bar{k}a)^2 - v_s^2 \right]^{1/2} \right\} \left\{ \left[ (k\varrho_2)^2 - v_s^2 \right] \left[ (k\varrho_1)^2 - v_s^2 \right] \right\}^{-1/4} T_{12} T_{21/v=v_s}$  (22 b)

und der Phase  $\Phi' = k \left\{ \left( \varrho_2^2 - \frac{v_s^2}{k^2} \right)^{1/2} + \left( \varrho_1^2 - \frac{v_s^2}{k^2} \right)^{1/2} - 2 \left( a^2 - \frac{v_s^2}{k^2} \right)^{1/2} + 2n \left( a^2 - \frac{v_s^2}{k^2} \right)^{1/2} \right\} + \frac{\pi}{4}$ . (22 c)

Liegt der Aufpunkt nach Abb. 6 im Schatten, so ergibt sich für  $G_{III0}$  eine Residuensumme der Gestalt

$$G_{III0} = \sum_p B_p' \exp[i\Phi_p'], \quad (23)$$

wobei über die Pole im ersten Quadranten zu summieren ist und  $B_p'$  und  $\Phi_p'$  aus (17b) und (17c) dadurch hervorgehen, daß man  $\varphi$  durch  $-\varphi$  ersetzt.

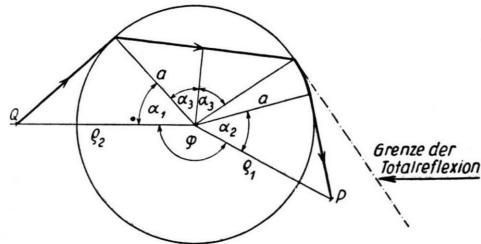


Abb. 6. Kriechstrecke der Welle (23).

$$\alpha_1 = \arccos \frac{a}{\varrho_2}; \quad \alpha_2 = \arccos \frac{a}{\varrho_1}; \quad \alpha_3 = \arccos \frac{1}{n}.$$

Es bleiben noch die Sattelpunkte von (19) in der rechten Halbebene zu untersuchen, für welche ebenfalls (20) erfüllt sein muß. An Hand von Abb. 7 können wir einige Aussagen über die Lage der Sattelpunkte bei verschiedener Lage des Aufpunktes gewinnen. Nach den Gesetzen der geometrischen Optik durchsetzen die Strahlen, welche unterhalb

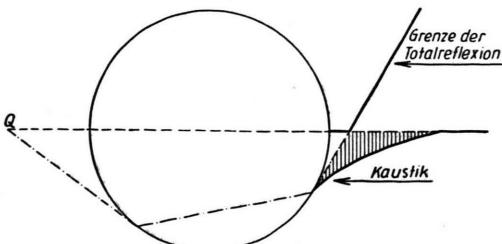


Abb. 7. Geometrisch-optische Grenzen des Lichtgebietes mit Kaustik.

aus der negativen Halbebene im Lichtgebiet nach Abb. 5 asymptotisch einen Beitrag der Art  $G_{III0} \sim B' e^{i\Phi'}$  (22 a)

des Zentralstrahles in den Zylinder eintreten und den Zylinder einmal auf einer Sehne durchqueren, hinter dem Zylinder ein Gebiet, welches, wie in Abb. 7 angedeutet, durch Teile des Zentralstrahles, der Grenze der Totalreflexion und der Kaustik begrenzt wird. Die Kaustik besitzt im Bildpunkt von Q eine Spitze. Ein Punkt, welcher innerhalb des in Abb. 7 schraffierten Gebietes liegt, wird jeweils von zwei Strahlen erreicht, denn die Kaustik ist die Einhüllende der Strahlen extremer Ablenkung. Deutet man auch hier  $\vartheta_s/k$  als den Abstand des vom Quellpunkt ausgehenden Strahles vom Mittelpunkt des Zylinders, so wird (20) von solchen Strahlen der geometrischen Optik erfüllt, welche einmal den Zylinder auf einer Sehne durchquert haben und bei denen der Eintrittspunkt in den Zylinder vom Aufpunkt aus gesehen diesesseits des Zentralstrahles liegt (vgl. Abb. 8). Liegt der Aufpunkt innerhalb des in

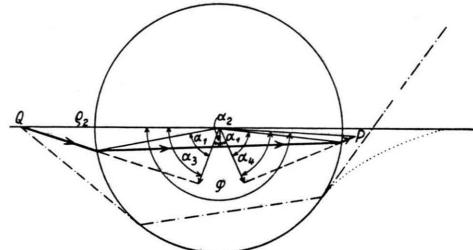


Abb. 8. Geometrisch-optischer Strahlengang, welcher dem Sattelpunkt nach Gl. (20) entspricht.

$$\alpha_1 = \arccos \frac{v_s}{k a}; \quad \alpha_2 = \arccos \frac{v_s}{k a} - \arccos \frac{v_s}{k a}; \\ \alpha_3 = \arccos \frac{v_s}{k \varrho_2}; \quad \alpha_4 = \arccos \frac{v_s}{k \varrho_1}.$$

Abb. 7 schraffiert gezeichneten Gebietes, so erreichen ihn zwei Strahlen; dem entsprechen zwei Lösungen von (20) und ein Verlauf des Integrationsweges in der rechten Halbebene nach Abb. 8. Daß tatsäch-

lich zwischen der Polreihe im ersten Quadranten und der positiv imaginären Achse ein Tal des Integranden liegt, wird in Anhang 2 gezeigt. Wandert der Aufpunkt auf die Kaustik zu, so nähern sich die beiden Sattelpunkte in Abb. 9, um beim Erreichen der Kaustik zu einem Dreifachsattel zu verschmelzen (vgl. Abb. 10).

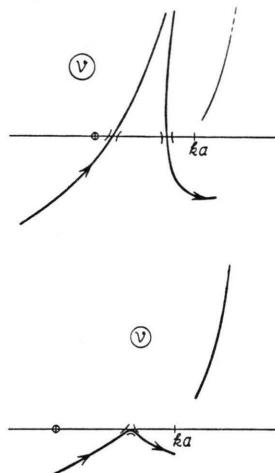


Abb. 9. Lage der Sattelpunkte, wenn Aufpunkt zwischen Kaustik, Grenze der Totalreflexion und Zentralstrahl liegt.

Abb. 10. Lage des Dreifachsattels, wenn Aufpunkt auf der Kaustik liegt.

Am Dreifachsattel verschwindet neben der ersten Ableitung auch die zweite Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \varphi - \ar \cos \frac{v}{k \varrho_2} - \ar \cos \frac{v}{k \varrho_1} + 2 \ar \cos \frac{v}{k a} - 2 \ar \cos \frac{v}{n k a} \right)_{v=v_s} = 0.$$

Durch Elimination von  $v_s$  erhält man aus dieser Gleichung zusammen mit (20) die Gleichung der Kaustik in Polarkoordinaten  $(\varrho_1, \varphi)$  mit dem Abstand des Quellpunktes  $(\varrho_2)$  als Parameter. Berech-

mit der Phase  $\Phi_k'' = k \left[ \left( \varrho_2^2 - \frac{v_k^2}{k^2} \right)^{1/2} + \left( \varrho_1^2 - \frac{v_k^2}{k^2} \right)^{1/2} - 2 \left( a^2 - \frac{v_k^2}{k^2} \right)^{1/2} + 2 n \left( a^2 - \frac{v_k^2}{k^2} \right)^{1/2} \right] + v_k \Delta \varphi$  (26 b)

und der Amplitude  $B_k'' = \frac{1}{2 \sqrt{2} \pi} \{ [(k \varrho_2)^2 - v_k^2] [(k \varrho_1)^2 - v_k^2] \}^{-1/4} \left( \frac{6}{F_k} \right)^{1/2} A \left[ \Delta \varphi \left( \frac{6}{F_k} \right)^{1/2} \right] (T_{12} T_{21})_{v=v_k}$ . (26 c)

Hierbei ist  $A(x)$  das AIRYSche Integral und  $F_k$  eine Abkürzung

$$F_k = v_k \{ 2[(k^2 a^2) - v_k^2]^{-3/2} - 2[(k a)^2 - v_k^2]^{-3/2} - [(k \varrho_2)^2 - v_k^2]^{-3/2} - [(k \varrho_1)^2 - v_k^2]^{-3/2} \}.$$

Da der Faktor  $F_k$  und damit das Argument des AIRYSchen Integrals stark von der Wellenlänge abhängen, ist auch die Intensitätsverteilung in der Umgebung der Kaustik stark von der Wellenlänge abhängig. Ferner treten dort Maxima und Minima der

net man den Beitrag des Dreifachsattels zur GREENschen Funktion, so tritt als Koeffizient ein AIRYSches Integral auf. Dies zeigt den Zusammenhang der strengen Beugungstheorie mit den AIRYSchen Untersuchungen der Intensität in der Umgebung eines extremal abgelenkten Strahles.

Wandert der Aufpunkt auf die Grenze der Totalreflexion zu, so nähert sich der rechte Sattelpunkt in Abb. 9 der Stelle  $v = k a$ . Beim Überschreiten der Grenze der Totalreflexion erhält man wie oben eine Residuensumme, welche den zu erwartenden Sprung der Kriechwellen liefert.

Damit liefert  $G_{III_0}$  aus der positiven Halbebene im Lichtgebiet nach Abb. 7 asymptotisch von jedem normalen Sattelpunkt einen Beitrag der Gestalt

$$B'' e^{i \Phi''}. \quad (24)$$

$B''$  und  $\Phi''$  haben dieselbe Gestalt wie  $B'$  (22 b) und  $\Phi'$  (22 c). Liegt der Aufpunkt zwischen Zylinderoberfläche, Grenze der Totalreflexion und Zentralstrahl, so kommt noch eine Residuensumme der Art

$$\sum_p B_p'' \exp[i \Phi_p''] \quad (25)$$

hinzu, wobei  $B_p''$  und  $\Phi_p''$  aus (17 b) und (17 c) dadurch hervorgehen, daß man  $\varphi$  durch  $\varphi - 2\pi$  ersetzt. Liegt der Aufpunkt in der Nähe der Kaustik, so entwickelt man zweckmäßigerweise den Integranden um den Dreifachsattel  $v_k$ . Ferner setzt man  $\varphi = \varphi_k + \Delta \varphi$ , wobei  $\varphi_k$  der Winkel ist, der bei dem vorliegenden Betrage von  $\varrho_1$  den Dreifachsattel liefert. Dann wird

$$G_{III_0}^+ \sim B_k'' \exp[i \Phi_k''] \quad (26 a)$$

$$G_{III_0}^+ \sim B_k'' \exp[i \Phi_k''] \quad (26 b)$$

Intensität auf, da das AIRYSche Integral mit wachsendem Argument rasch oszilliert. Diese Schwankungen sind auf Interferenzen der beiden Strahlen zurückzuführen, die sich am Aufpunkte jeweils schneiden.

Wandert der Aufpunkt über die Kaustik hinaus in den geometrischen Schatten, so trennt sich der Dreifachsattel von Abb.10 wieder in zwei Sattelpunkte. Der Integrationsweg ist dann über den tiefer gelegenen Sattel mit  $\Im(\nu_s) < 0$  zu führen, welcher einen exponentiell kleinen Beitrag liefert.

Es bleibt noch das Verhalten bei Annäherung an die Spitze der Kaustik zu untersuchen. In diesem Falle wird  $F_k$  Null und die Amplitude würde nach (26) unendlich, es liegt also ein Sattel noch höherer Ordnung vor. Man hat dann lediglich die Entwicklung in (19) noch weiterzuführen, um für die Amplitude einen endlichen Ausdruck zu erhalten.

## 5. Regenbögen

Die Behandlung der Reihenglieder in (13 d) mit  $l \neq 0$  erfolgt analog. Die Sattelpunkte entsprechen hier solchen Strahlen der geometrischen Optik, welche den Zylinder  $(l+1)$ -mal auf einer Sehne durchquert haben und hierbei im Innern  $l$ -mal reflektiert wurden. Teilweise lassen sich die Integrale durch Residuensummen auswerten und liefern so den Anschluß an die Kriechwellen (14). Liegt der Aufpunkt in der Umgebung des minimal abgelenkten Strahles, so ist die Sattelpunktsauswertung in der Umgebung eines Dreifachsattels durchzuführen und liefert als Amplitudenfaktoren AIRYSche Integrale.

Zur Deutung der Summation über  $m$  betrachten wir zunächst die Wellen (14). Entwickelt man den Bruch  $(1 - e^{2\pi i \nu})^{-1}$  in die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} e^{2\pi i \nu \mu},$$

so erhält man in (14) Anteile mit den folgenden Kriechstrecken:

$$\Re \left\{ \nu_p \left[ \frac{\varphi}{2\pi - \varphi} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} + 2(l+1) \left( \pi - \ar \cos \frac{1}{n} \right) + 2\pi \mu \right] \right\}. \quad (27)$$

Für  $\mu = 0$  wird die Kriechstrecke am kleinsten. Bei jedem Umlauf um den Zylinder wächst sie um  $\Re(\nu_p 2\pi)$ , so daß die Wellen mit  $\mu \neq 0$  nichts anderes sind als die  $\mu$ -fach um den Zylinder gekrochenen Wellen mit  $\mu = 0$ . Nun kann bei größeren Werten von  $l$  sogar für  $\mu = 0$  die Kriechstrecke (27) schon größer als  $\Re(\nu_p 2\pi)$  sein. Dies bedeutet, daß die Welle bereits einen oder mehrere Umläufe um den Zylinder hinter sich hat, welche in (14) nicht enthalten sind. Diese fehlenden Wellen finden sich in der Summe über  $m$  in (13 d): Die Reihenglieder lassen sich teilweise durch Residuen von Polen im ersten Quadranten darstellen und ergeben dann Kriechwellen mit den Kriechstrecken

$$\Re \left\{ \nu_p \left[ \varphi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} + 2m\pi - 2(l+1) \ar \cos \frac{1}{n} \right] \right\}. \quad (28)$$

Für die numerische Auswertung sind nur Kriechwellen mit positiven Kriechstrecken brauchbar. Damit erhalten wir aus der Summe über  $m$  Kriechwellen der Art (28) für alle  $m_1 \leq m \leq 1$ , wo  $m_1$  bestimmt wird aus der Forderung

$$0 \leq \Re \left\{ \nu_p \left[ \varphi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} + 2m_1\pi - 2(l+1) \ar \cos \frac{1}{n} \right] \right\} < \Re(\nu_p 2\pi). \quad (29)$$

Durch Vergleich mit (27) sieht man, daß dies genau die dort fehlenden Wellen mit mathematisch positivem Umlaufsinn sind. Analog liefern alle Reihenglieder mit  $0 \leq m \leq m_2$  die in (14) fehlenden Wellen mit negativem Umlaufsinn als Residuen von Polen im dritten Quadranten. Die Bestimmungsgleichung für  $m_2$  lautet:

$$0 \leq \Re \left\{ \nu_p \left[ \varphi - \ar \cos \frac{a}{\varrho_1} - \ar \cos \frac{a}{\varrho_2} + 2(l+1-m_2)\pi - 2(l+1) \ar \cos \frac{1}{n} \right] \right\} < \Re(\nu_p 2\pi). \quad (30)$$

Die restlichen Reihenglieder, in welchen  $m_2 < m < m_1$  ist, liefern weder im ersten noch im dritten Quadranten Residuensummen. Statt dessen erlaubt gerade bei ihnen die Integralform stets eine Sattelpunktsauswertung. Sie entsprechen geometrischen Beiträgen, deren Bedeutung man am einfachsten nach

Übergang zu unendlich weit entferntem Quell- und Aufpunkt ersieht:

Bezeichnen wir mit  $\pi/2 - \chi_1$  den Einfallswinkel eines Strahles und mit  $\pi/2 - \chi_2$  den zugehörigen Brechungswinkel, so gilt

$$0 \leq \chi_1 \leq \pi/2 \text{ und } \ar \cos(1/n) \leq \chi_2 \leq \pi/2.$$

Der Zentralstrahl,  $\chi_1 = \chi_2 = \pi/2$ , erfährt die Gesamtablenkung  $\psi = l\pi$ . Entfernt man sich vom Zentralstrahl, so nimmt  $\psi$  ab und erreicht ein Minimum  $\psi_m$ . Zu diesem gehören die Winkel  $\chi_{1m}$  und  $\chi_{2m}$ . Bei größeren Abständen nimmt  $\psi$  wieder zu, bis schließlich der tangentielle Einfall erreicht wird und der Eintritt unter dem Winkel der Totalreflexion  $\pi/2 - \chi_{2T}$ ,  $\chi_{2T} = \arcsin(1/n)$ , erfolgt. Insgesamt wird ein Winkelraum

$$\Psi \equiv l\pi - \psi_m = l(\pi - 2\chi_{2m}) + 2(\chi_{1m} - \chi_{2m}) \quad (31)$$

von Strahlen der geometrischen Optik überdeckt; davon der Winkelraum  $l\pi - \psi_T$  von Einfachstrahlen und der Winkelraum  $\psi_T - \psi_m$  von Strahlenpaaren. Ist nun  $\Psi > 2\pi$ , dann wird ein Winkelbereich der Größe  $\Psi - 2\pi$  zweifach überdeckt; oder allgemein: falls

$$2k\pi < \Psi < (k+1)2\pi, \quad k \text{ ganz } > 0, \quad (32)$$

so wird der gesamte Winkelbereich  $k$ -fach überdeckt, ein Winkelbereich  $\Psi - k2\pi$  sogar  $(k+1)$ -fach. Die Summation über  $m$  bewirkt nun, daß trotz des beschränkten Variabilitätsbereiches von  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) alle die Strahlen bei der Sattelpunktauswertung von (13 d) erfaßt werden.

## Mathematische Anhänge

### 1. Zur Umformung der Residuensumme (16)

Die in (16) auftretenden Ableitungen von  $H_v^{(1)}(ka)$  lassen sich asymptotisch alle zurückführen auf Ableitungen des AIRYSchen Integrals  $A(q)$  (vgl. Anm. 4) nach dem Argument

$$q = \left(\frac{6}{ka}\right)^{1/3} e^{-i(\pi/3)} (v - ka).$$

Es gilt nämlich in der Umgebung von  $v = ka$  asymptotisch:

$$H_v^{(1)}(ka) \sim \frac{2}{\pi} y A(q), \quad (A 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial ka} H_v^{(1)}(ka) \sim -\frac{2}{\pi} y^2 A'(q), \quad (A 2)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} H_v^{(1)}(ka) \sim \frac{2}{\pi} y^2 A'(q), \quad (A 3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial ka} H_v^{(1)}(ka) \sim \frac{2}{\pi} \frac{y^3}{3} q A(q), \quad (A 4)$$

$$y = \left(\frac{6}{ka}\right)^{1/3} e^{-i(\pi/3)}, \quad q = y(v - ka). \quad (A 5)$$

Beim Übergang von (16) nach (17) ersetzt man nun  $A'(q)$  mittels der Polstellengleichung

$$\log' H_{vp}^{(1)}(ka) = N \log' H_{vp}^{(2)}(\bar{ka}). \quad (A 6)$$

(A 6) lautet asymptotisch:

$$y \frac{A'(qp)}{A(qp)} \sim i N \left[ 1 - \frac{v_p^2}{(\bar{k}a)^2} \right]^{1/2}. \quad (A 7)$$

### 2. Zum Verhalten des Integranden von (13 d) im Unendlichen

Für das Verhalten des Integranden von (13 d) im Unendlichen der  $v$ -Ebene ist der Faktor

$$F = \left| e^{iv\Phi} \frac{H_v^{(1)}(k\varrho_2) H_v^{(1)}(k\varrho_1)}{[H_v^{(1)}(ka)]^2 [H_v^{(2)}(\bar{k}a)]^2} \left[ \frac{H_v^{(1)}(\bar{k}a)}{H_v^{(2)}(\bar{k}a)} \right]^l \right| \quad (A 8)$$

maßgebend.  $e^{iv\Phi}$  ist ein Glied von

$$\sum_{m=0}^l e^{iv\pi(1+2m)} \cos v(\varphi - \pi).$$

Es genügt, das Verhalten im ersten Quadranten zu bestimmen; das Verhalten im dritten Quadranten ergibt sich unter Benutzung der Umlaurelationen bzw. in (13 d) aus Symmetriebetrachtungen. Ferner dürfen wir uns darauf beschränken, die Größe von  $F$  auf den Nullstellenkurven von  $H_v^{(1)}(ka)$ ,  $H_v^{(1)}(\bar{k}a)$ ,  $H_v^{(1)}(k\varrho_1)$ ,  $H_v^{(1)}(k\varrho_2)$  und der positiv reellen Achse zu bestimmen.

Auf der Nullstellenkurve von  $H_v^{(1)}(x)$  im ersten Quadranten gilt für  $v = t e^{i\psi}$ ,  $t \rightarrow \infty$

$$|H_v^{(1)}(x)| \sim |H_v^{(2)}(x)| \sim 1, \quad (A 9)$$

$$|H_v^{(1)}(y)| \sim \frac{1}{t} |H_v^{(2)}(y)|$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \exp \left[ t \frac{\pi}{2} \frac{\log(y/x)}{\log(2t/x)} \right]; \quad \Re(x) > \Re(y),$$

$$|H_v^{(1)}(u)| \sim |H_v^{(2)}(u)|$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \exp \left[ -t \frac{\pi}{2} \frac{\log(u/x)}{\log(2t/x)} \right]; \quad \Re(x) < \Re(u).$$

Damit verhält sich (A 8) auf der Nullstellenkurve von  $H_v^{(1)}(ka)$  wie

$$F \sim \exp \left\{ -t \left[ \Phi - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\log(2t/x)} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \log \frac{\varrho_1 \varrho_2}{a^2} + 2(l+1) \log |n| \right) \right] \right\}, \quad (A 10)$$

wird also für  $\Phi > 0$  und  $t \rightarrow \infty$  exponentiell klein. Dies bedeutet, daß links von der Nullstellenkurve von  $H_v^{(1)}(ka)$  noch ein Teil des Integranden liegt. Auf der Nullstellenkurve von  $H_v^{(1)}(\bar{k}a)$  wird asymptotisch

$$F \sim \exp \left\{ -t \left[ \Phi - \frac{\pi}{2} \frac{\log(\varrho_1 \varrho_2 / a^2 |n|^4)}{\log(2t/|ka|)} \right] \right\}. \quad (A 11)$$

$F$  verschwindet also ebenfalls exponentiell für  $\Phi > 0$  und  $t \rightarrow \infty$ . Auf der Nullstellenkurve von  $H_v^{(1)}(k\varrho_1)$  ist

$$F \sim \exp \left\{ -t \left[ \Phi - \frac{\pi}{2} \frac{\log(\varrho_2 a^4 |n|^2 / \varrho_1^5)}{\log(2 t/k \varrho_1)} \right] \right\} \quad (\text{A 12})$$

und verschwindet für  $\Phi > 0$  und  $t \rightarrow \infty$  exponentiell. Auf der Nullstellenkurve von  $H_r^{(1)}(k \varrho_2)$  wird

$$F \sim \left( \frac{a}{\varrho_1} \right)^r \exp \left\{ -t \left[ \Phi - \frac{\pi}{2} \frac{\log(a^3 |n|^2 / \varrho_2^3)}{\log(2 t/k \varrho_1)} \right] \right\}. \quad (\text{A 13})$$

Hier verschwindet  $F$  für  $\Phi \geq 0$  und  $t \rightarrow \infty$  exponentiell. Auf der positiv reellen Achse gilt asymptotisch

$$F \sim \left( \frac{a}{\varrho_1 \varrho_2} \right)^t \left( \frac{l k a}{2 t} \right)^{2t}. \quad (\text{A 14})$$

$F$  verschwindet hier sogar stärker als exponentiell.

## NOTIZEN

### Die Energieverteilung der Elektronenemission mechanisch bearbeiteter Metalloberflächen

Von J. LOHFF

Institut für angewandte Physik der Universität Hamburg  
(Z. Naturforsch. 12 a, 267—268 [1957]; eingegangen am 11. Februar 1957)

Einige Metalle emittieren in einer sauerstoffhaltigen Atmosphäre nach der Bearbeitung mit einer Stahlbürste Elektronen als Folge chemischer Reaktionen an der Oberfläche<sup>1, 2</sup>. Um den Elementarprozeß der Elektronenemission näher kennen zu lernen, wurde die Energieverteilung gemessen.

Die zur Probenoberfläche senkrechte Komponente  $v_z$  der Geschwindigkeit läßt sich mit einer Gegenfeldanordnung messen, welche alle Elektronen registriert, deren Energie  $E_z = \frac{1}{2} m v_z^2$  größer als  $eV$  ( $V$  = Gegenspannung) ist. Dieses Gegenfeld wurde durch ein engmaschiges und feindrähtiges Netz erzeugt. Die durch das Gitter hindurchgelassenen Elektronen wurden nachbeschleunigt und zum Nachweis in einen Sekundärelektronenvervielfacher geschossen. Die emittierenden Proben hatten eine Fläche von ungefähr  $0,4 \text{ cm}^2$ . Sie befanden sich im Abstand von 2 mm unter dem Gitter und waren mit einem ringförmigen, in der Ebene der Probenoberfläche liegenden Blech umgeben, um definierte Potentialverhältnisse zu erhalten.

Da die Elektronenemission zeitlich abklingt, wurde zur Messung der Energieverteilung folgendes Verfahren gewählt, welches sich als brauchbar herausstellte: Bei einer festen Gitterspannung  $U$  und einem konstanten Sauerstoffdruck im Rezipienten wurde die Probe mit einer Stahlbürste bearbeitet, unter das Gitter gedreht und zu einem festen Zeitpunkt  $t$  nach der Bearbeitung die mittlere Zahl  $N$  der in der Sekunde durch das Gitter hindurchgetretenen Elektronen mit einem an den Vervielfacher angeschlossenen Mittelwertmesser bestimmt. Die Verteilungskurve  $N(U)$  ergab sich durch Wiederholung dieses Versuches bei verschiedenen Gitterspannungen.

<sup>1</sup> J. LOHFF u. H. RAETHER, Naturwiss. 42, 66 [1955]; Z. Phys. 142, 310 [1955].

<sup>2</sup> J. LOHFF, Z. Phys. 146, 436 [1956].

<sup>3</sup> Die Elektronen werden unter verschiedenen Winkeln zur Oberfläche austreten. Ein von der Gegenspannung  $|U - U_K|$

Abb. 1 zeigt die Verteilungskurven der Emission von Aluminium bei  $5 \cdot 10^{-4}$  Torr  $O_2$ . Der Kurvenparameter ist die Zeit  $t$  nach der Bearbeitung. Man erhält bei niedrigen Gitterspannungen Geraden, die nach dem

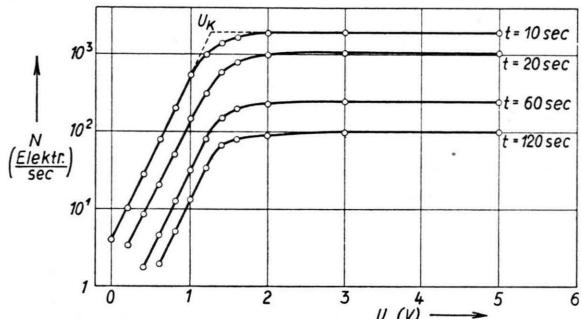


Abb. 1. Die Energieverteilung der Elektronenemission von Aluminium nach der Bearbeitung mit einer Stahlbürste bei  $5 \cdot 10^{-4}$  Torr  $O_2$ , gemessen mit einer Gegenfeldanordnung.  $U$  = Gitterspannung,  $U_K$  = Kontaktspannung zwischen Probe und Gitter,  $t$  = Zeit nach der Bearbeitung.

Durchlaufen eines Übergangsgebietes in die Horizontale, die Sättigung, übergehen. Die Lage des Knicks ist durch die Kontaktspannung  $U_K$  zwischen der Probe und dem Gitter gegeben. Es läßt sich zeigen, daß die Abrundung der Kurve im Knick mindestens zum großen Teil durch die geometrische Anordnung bedingt ist<sup>3</sup>. Außerhalb dieses Übergangsgebietes ist die Verteilung durch die Gleichung

$$N(U) = N_0 \exp \frac{U - U_K}{\bar{U}} \quad (1)$$

zu beschreiben, wo  $N_0$  der Sättigungsstrom und  $\bar{U}$  eine Konstante ist. Aus der Neigung der Geraden ergibt sich die mittlere Energie  $e \bar{U}$  der Elektronen. Diese war bei den Versuchen bis auf ungefähr 0,02 eV reproduzierbar. Man erhält für alle Kurven der Abb. 1:

$$E_z = e \bar{U} = 0,20 \pm 0,02 \text{ eV}.$$

abhängiger Teil der besonders schräg emittierten Elektronen kann das Gitter wegen dessen endlicher Ausdehnung nicht erreichen. Daraus errechnet sich eine Abrundung der Kurve in der Umgebung der Kontaktspannung.